საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემია
ქართული ენციკლოპედიის ი. აბაშიძის სახელობის მთავარი სამეცნიერო რედაქცია

ინტეგრალური აღრიცხვა

ინტეგრალური აღრიცხვა (ლათ. integralis – მთელი), მათემატიკის დარგი, რომელიც შეისწავლის განუსაზღვრელი და განსაზღვრული ინტეგრალების თვისებებს, ინტეგრალების გამოთვლის მეთოდებს და მათი გამოყენების არეს. ი. ა. მჭიდროდაა დაკავშირებული დიფერენციალურ აღრიცხვასთან და მასთან ერთად შეადგენს მათ. ანალიზის საფუძველს.

ი. ა-ის უძველესი ამოცანები ანტ. ხანის გეომეტრიიდან მომდინარეობს და ეხება წირების სიგრძის, გეომ. ფიგურების ფართობისა და სხეულთა მოცულობის გამოთვლას. არქიმედე იკვლევდა წრეწირის სიგრძის, წრის ფართობის, სფეროსა და ცილინდრის ზედაპირების ფართობებისა და მათი მოცულობის გამოთვლის ამოცანებს, ამასთან, იყენებდა ევდოქსის (ძვ. წ. V–IV სს.) მიერ შემოღებულ ამოწურვის მეთოდს. არქიმედეს ეკუთვნის პარაბოლითა და კოორდინატთა ღერძით შექმნილი ფიგურის ფართობის გამოთვლაც. ეს მეთოდები XVII ს-ში განავითარეს ბ. კავალიერიმ (1598–1647), ე. ტორიჩელიმ (1608–47), პ. ფერმამ (1601–65), ბ. პასკალმა (1623–62) და სხვ., რ-თაც ამოხსნეს მრავალი კერძო ამოცანა. 1659 ი. ბაროუმ (1630–77) აღმოაჩინა კავშირი გლუვი წირის მხების აგების ამოცანასა (დიფერენციალური აღრიცხვის ამოცანა) და ფართობის გამოთვლის ამოცანას შორის.

ი. ა-ს XVII ს. 70-იან წლებში საფუძველი ჩაუყარეს ი. ნიუტონისა და გ. ლაიბნიცის შრომებმა, დადგინდა კავშირი ი. ა-სა და დიფერენციალურ აღრიცხვას შორის და დამუშავდა ინტეგრალების გამოთვლის (ინტეგრების) ტექნიკა. თანამედროვე სახე ინტეგრების მეთოდებმა მიიღო, ძირითადად, ლ. ეილერის შრომებში. მეთოდების განვითარება თითქმის დასრულდა კ. ფ. გაუსის (1777–1855), მ. ოსტროგრადსკის (1801–61), პ. ჩებიშევის (1821–94) და ბ. რიმანის (1826–66) გამოკვლევებით.

ისტორიულად ინტეგრალს უწოდებენ f (x) ფუნქციის გრაფიკითა და აბსცისათა Ox ღერძის [a, b] მონაკვეთით შემოსაზღვრული მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რ-ის გამოსათვლელად [a, b] მონაკვეთს დაყოფენ ამა თუ იმ ხერხით n ნაწილად Δx_1,... Δx_n და აგებენ საფეხურებიან ფიგურას (ნახაზზე გამუქებულია). ამ ფიგურის ფართობი ტოლია $F_n = y_i \Delta x_1 + ... + y_n\ \Delta x_n$, სადაც y_i არის f (x) ფუნქციის მნიშვნელობა Δx_i მონაკვეთის რომელიმე წერტილში (i =1,...,n). ლაიბნიცმა ამ ჯამის ზღვარი აღნიშნა სიმბოლოთი ∫ ydx. ტერმინი „ინტეგრალი“ შემოიღო ლაიბნიცის მოსწავლემ იოჰან ბერნულიმ (1667–1748), „უსასრულო რაოდენობის შესაკრებთა ჯამის“ განსასხვავებლად ჩვეულებრივი ჯამისგან. ჟ. ფურიემ შემოიღო განსაზღვრული ინტეგრალის თანამედროვე აღნიშვნა ydx, სადაც a და b ინტეგრების შუალედის საწყისი და ბოლო წერტილებია. ბ. რიმანმა (1854) და ჟ. დარბუმ (1875) ნიუტონისა და ლაიბნიცის მიერ შემოღებულ ცნებებს მისცეს მკაცრი მათ. შინაარსი. დარბუს თანახმად, რიმანის ინტეგრალი განიხილება როგორც საერთო ზღვარი (თუკი ასეთი არსებობს) y=f (x) ფუნქციის გრაფიკზე შემოხაზული და ამ გრაფიკში ჩახაზული საფეხურებიანი ფიგურების ფართობებისა, როცა [a, b] მონაკვეთის დაყოფათა რიცხვი უსასრულოდ იზრდება, ხოლო Δx_1,..., Δx_n შუალედები უსასრულოდ მცირდება. თუ ასეთი ზღვარი არსებობს, ინტეგრალქვეშა ფუნქციას ინტეგრებადი (რიმანის აზრით) ეწოდება. არსებობს განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის სხვა მეთოდებიც, რ-თაგან უმნიშვნელოვანესია ე.წ. ლებეგის ინტეგრალი. ა. ლებეგმა (1875–1941) განაზოგადა რიმანის ინტეგრალი ფუნქციათა უფრო ფართო კლასისთვის. ამისთვის საკმარისი აღმოჩნდა შუალედებად დაეყოთ არა ფუნქციის განსაზღვრის არე, არამედ ცვლილების არე (იხ. ნახაზი). თუ ფუნქცია ინტეგრებადია ლებეგის აზრით, მაშინ ის რიმანის აზრითაც ინტეგრებადია და ინტეგრების შედეგები ერთმანეთის ტოლია. მაგრამ არსებობს ლებეგის აზრით ინტეგრებად ფუნქციათა ფართო კლასი, რ-იც რიმანის აზრით არაინტეგრებადია.

განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის შედეგი (ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ინტეგრებადობის შემთხვევაში) არის რიცხვი (განზოგადებებში, შესაძლოა, უსასრულობაც). განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა მჭიდროდ უკავშირდება მოცემული f (x) ფუნქციის პირველადის მოძებნას – ისეთი (დიფერენცირებადი) f (x) ფუნქციის მოძებნას, რ-ის წარმოებული f ´(x) ტოლია [a, b] მონაკვეთზე განსაზღვრული f (x) ფუნქციისა ამ მონაკვეთის ყოველ წერტილში. თუ F (x) არის f (x) ფუნქციის ერთ-ერთი პირველადი, მაშინ F (x)+C ასევე პირველადია: [F (x)+C]´=F’(x)= f (x), სადაც C ნებისმიერი მუდმივი შესაკრებია; F (x)+C წარმოადგენს ფუნქციათა ოჯახს – f (x) ფუნქციის ყველა პირველადის ზოგად გამოსახულებას – და ეწოდება f (x) ფუნქციის განუზღვრელი ინტეგრალი; აღინიშნება ∫ f (x)dx სიმბოლოთი. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფუნდამენტური თეორემის თანახმად, განსაზღვრული ინტეგრალი როგორც ცვლადი ზედა x საზღვრის ფუნქცია, მოცემული f (x) ფუნქციის პირველადია.

ელემენტარული ფუნქციის პირველადი ყოველთვის არ გამოისახება ხოლმე ელემენტარული ფუნქციებით. ამიტომ ინტეგრება, დიფერენცირებისგან განსხვავებით, წარმოადგენს გარკვეულ „ხელოვნებას“. ისტორიულად, ი. ა-ის ერთ-ერთი ფუნდამენტური

ამოცანა იყო იმ ფუნქციათა კლასის დადგენა, რ-თა პირველადი გამოისახება ელემენტარული ფუნქციებით. კერძოდ, x ცვლადის ნებისმიერი რაციონალური ფუქნციის ინტეგრება შესაძლებელია ელემენტარულ ფუნქციათა კლასში (პ. ლაპლასი, 1729–1827). ელემენტარული ფუნქციების შემცველი ალგებრული გამოსახულებების ინტეგრებისთვის იყენებენ ინტეგრალქვეშა გამოსახულების გარდაქმნის სხვადასხვა, ხშირად საკმარისად შრომატევად მეთოდს, რ-თაგან უმთავრესია ჩასმის (ახალი დამოუკიდებელი ცვლადის შემოღების) და ე. წ. ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდები, რ-იც ჯერ კიდევ ნიუტონმა, განსაკუთრებით კი ლ. ეილერმა და კ. ფ. გაუსმა განავითარეს. ამ მეთოდების გამოყენებით ცდილობენ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება დაიყვანონ ისეთ სახეზე, რომ შესაძლებელი გახდეს უმარტივესი ელემენტარული ფუნქციებისთვის შედგენილი ინტეგრალთა ცხრილის გამოყენება. ამასთან, ფუნქციის ინტეგრებადობისთვის, ანუ მისი პირველადის არსებობისთვის, ი. ა-ის ძირითადი თეორემით, საკმარისია საინტეგრო ფუნქციის უწყვეტობა. ინტეგრალის არსებობის ფაქტი არ იძლევა თუნდაც რაიმე მითითებას მისი გამოთვლის ხერხისა და სასრული ფორმით, ანუ ელემენტარული ფუნქციების სასრული კომბინაციის სახით მისი წარმოდგენის შესაძლებლობის შესახებ. სასრული ფორმით ინტეგრალების პოვნის მრავალი სირთულე გადაჭრა ჟ. ლიუვილმა (1809–82). შედგენილია განუზღვრელ და განსაზღვრულ ინტეგრალთა ვრცელი ცხრილები, მ. შ. ელექტრონულ-ციფრულ ფორმატში. ინტეგრალთა გამოთვლის ზოგადი ალგორითმი ნაპოვნია მხოლოდ ზოგიერთი ტიპის ფუნქციებისთვის. ამ მიმართულებით შემდგომი წინსვლა უკავშირდება ინტეგრების სიმბოლური ალგორითმების შექმნას და განვითარებას, რაც შესაძლებელი გახდა თანამედროვე კომპიუტერული პროგრამების გამოყენებით. მაგ., ალგორითმი, რ-იც შეიმუშავა ამერ. მათემატიკოსმა რ. რიშმა (1968), იძლევა საშუალებას გაირკვეს, ელემენტარულია თუ არა მოცემული ელემენტარული ფუნქციის პირველადი და დადებითი პასუხის შემთხვევაში პოულობს ამ პირველადს. რამდენადაც f (x) ფუნქციის პირველადის გამოთვლა, ანუ ინტეგრების ოპერაცია, გარკვეული აზრით დიფერენცირების შებრუნებული მოქმედებაა, ზოგიერთი ავტორი იყენებს ტერმინს „ანტიდიფერენციალი“ და აღნიშნავს განუზღვრელ ინტეგრალს სიმბოლოთი D^{-1}. ასეთი აღნიშვნა მოსახერხებელია ე. წ. არამთელი რიგის დიფერენციალებისა და ანტიდიფერენციალების განხილვისას, რაც მათ. ანალიზის მნიშვნელოვანი მიმართულება გახდა.

ი. ა. შეისწავლის ერთი დამოუკიდებელი ცვლადის f (x) ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალის მრავალრიცხოვან განზოგადებებს

ი. ა. შეისწავლის კავშირებს სხვადასხვა ჯერადობის ინტეგრალებს შორის. არსებობს ე. წ. ინტეგრალური ფორმულები – გაუსის ფორმულა, რ-იც აკავშირებს სივრცით (მოცულობით) ინტეგრალს ამ მოცულობის საზღვარზე გამოთვლილ ინტეგრალთან (შევნიშნოთ, რომ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა წარმოადგენს გაუსის ამ ფორმულის კერძო შემთხვევას); სტოქსის ფორმულა, რ-იც აკავშირებს (გამრუდებულ) ზედაპირზე გამოთვლილ ინტეგრალს ამ ზედაპირის შემომსაზღვრელ (ჩაკეტილ) წირზე გამოთვლილ ინტეგრალთან და სხვ.

გამოყენებითი ხასიათის მრავალი ამოცანა მოითხოვს ინტეგრალის ცნების გავრცელებას იმ შემთხვევებისთვის, როცა f (x) ფუნქცია არაა შემოსაზღვრული თავისი განსაზღვრის [a, b] მონაკვეთზე ან განსაზღვრულია უსასრულო მონაკვეთზე. მაშინ, მაგ., f (x)dx განისაზღვრება ზღვრული გადასვლის გამოყენებით, როგორც f (x)dx როცა a→a, b→∞. თუ f (x) არაა შემოსაზღვრული მისი განსაზღვრის [a,b] მონაკვეთის რაიმე cÎ[a,b] წერტილში, მაშინ f (x)dx განისაზღვრება, როგორც როცა a→0, b→0+ (ნულისკენ მისწრაფება ხდება მარჯვნიდან). ინტეგრალის ამ განზოგადებებს არა საკუთრივი ინტეგრალი ეწოდება. თუ ზღვრები ზემოთ მოყვანილ ფორმულებში არ არსებობს, არასაკუთრივ ინტეგრალს განშლადს უწოდებენ. ეს არ გამორიცხავს შესაძლებლობას, რომ არსებობდეს, მაგ., ზღვარი როცა α→0+. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ არსებობს f (x) dx კოშის მთავარი მნიშვნელობით.

ი. ა-ის მეთოდებსა და შედეგებს ფართოდ იყენებენ მექანიკაში, თეორიულ ფიზიკაში, ეკონომიკურ მოდელირებაში და სხვ.

საქართველოშიXVII–XIX სს-ში რენესანსისა და მომდევნო პერიოდის მიღწევებს ი. ა-ში გამოხმაურება არ მოჰყოლია. მდგომარეობის შეცვლა დაიწყო 1918-იდან, საქართველოს დამოუკიდებლობის მოპოვებისთანავე. ა. რაზმაძემ მოამზადა და გამოსცა მათ. ანალიზის სამი სახელმძღვანელო (ორი სიცოცხლეშივე, 1920 და 1923), სადაც ი. ა. აისახა ფრანგულ და გერმანულ ენებზე გამოცემულ შესაბამის ლიტერატურასთან კავშირში. 1938 დაისტამბა ლ. გოკიელის სახელმძღვანელო „მათემატიკური ანალიზის შესავალი“, რ-იც 1948-იდან ჩაანაცვლა ე. წ. „ოთხი ავტორის“ (ა. ხარაძე, ვ. ჭელიძე, ბ. ხვედელიძე, ი. ქარცივაძე) ორტომეულმა „მათემატიკური ანალიზის კურსი“. ამასთან, უნდა აღინიშნოს ინტეგრალის ცნების განვრცობისა და განზოგადების ცდები ქართვ. მეცნიერთა მიერ. ამ მიმართულებით აღიარებული შედეგები ეკუთვნის ა. რაზმაძის მოწაფეს ვ. ჭელიძეს (იხ. სტ. დანჟუას ინტეგრალი). XX ს. 80-იანი წლების ბოლოს ი. ქარცივაძის ავტორობით გამოიცა მათ. ანალიზის თანამედროვე კურსი, სადაც აისახა, პირველ რიგში, დიოდონეს (საფრანგეთი), რუდინის (აშშ), ზორიჩის (რუსეთი) და სხვათა შეხედულებები. XX ს. II ნახ-იდან რ. კურანტისა და ლ. ბერსის ძალისხმევით, ი. ა-ის სასწავლო კურსებს დაემატა ე. წ. „კალკულუსის“ სწავლებაც, რაც მიზნად ისახავდა კლასიკური მათ. ანალიზის (თეორიული კურსის) რეალურ ანალიზამდე მიყვანას. ეს მიმართულება ვითარდება საქართვ. უმაღლესი განათლების სისტემაშიც. ვითარდება განსაზღვრული ინტეგრალის რიცხობრივი გამოთვლის (კვადრატურული პროცესების) მეთოდებიც. ამ მიმართულებით მნიშვნელოვანია თ. ვაშაყმაძის შედეგები. XX ს. ბოლოდან დაწყებული ქართვ. მათემატიკოსების მიერ (ს. თოფურია, პ. ზერაგია და სხვ.) გამოცემულია მრავალი სახელმძღვანელო ი. ა-სა და კალკულუსის საფუძვლებში, როგორც მათ. სპეციალობების, ასევე ეკონომისტებისა და სხვა სპეციალობების სტუდენტებისთვის.

ლიტ.: რ ა ზ მ ა ძ ე ა., ინტეგრალური აღრიცხვის კურსი, ნაწ. 1 – განუსაზღვრელი ინტეგრალები, ტფ., 1922; ჭ ე ლ ი ძ ე ვ., წ ი თ ლ ა ნ ა ძ ე ე., მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. 1–2, თბ., 1963–68; ხ ა რ ა ძ ე ა., ქ ა რ ც ი ვ ა ძ ე ი., მათემატიკური ანალიზის კურსი, თბ., 1963–68; К у р а н т Р., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 4-е изд., т.1–2, М., 1967–70; Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7-е изд., т. 2, М., 1969; Bronstein M., Symbolic Integration, I – Springer, 2005; Geddes K. O.,Czapor S. R., Labahn G.,Algorithms for Computer Algebra. – Kluwer Academic Publishers, 1992.

ი. ლომიძე