საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემია

ქართული ენციკლოპედიის ი. აბაშიძის სახელობის მთავარი სამეცნიერო რედაქცია

ინტეგრალური განტოლება

ინტეგრალური განტოლება, განტოლება, რომელიც საძიებელ ფუნქციას ინტეგრალის ნიშნის შიგნით შეიცავს. ფიზ. და მათ.-ფიზ. მრავალრიცხოვან ამოცანებს მივყავართ სხვადასხვა ტიპის ი. გ-ებამდე. პირველი გვარის წრფივი ი. გ. ეწოდება K (x,t) u (t) dt= =f (x) სახის განტოლებას, ფრედჰოლმის მეორე გვარის ი. გ. – განტოლებას u (x)–λ K (x,t) u (t) dt=f (x) (თუ f (x)≡0,, მაშინ მას ეწოდება ფრედჰოლმის ერთგვაროვანი ი. გ.). ყველა განტოლებაში ფუნქცია K (x,y) – ი. გ-ის ბირთვი – ცნობილია და განსაზღვრულია α≤x≤b, α≤y≤b კვადრატზე; ასევე ცნობილია ფუნქცია f (x) (α ≤ x ≤ b) და λ პარამეტრი. საძებნია ფუნქცია u (x) (α≤x≤b). K (x,y), f (x), u (x) ფუნქციებსა და λ პარამეტრს შეუძლია მიიღოს როგორც ნამდვილი, ისე კომპლ. მნიშვნელობები. თუ ბირთვი K (x,y) ნულის ტოლი ხდება, K (x,y)=0, როდესაც y>x, მიიღება ე. წ. ვოლტერას ი. გ.:

u (x)–λK (x,t) u (t) dt=f (x).

ი. გ-ს ეწოდება განსაკუთრებული ან სინგულარული, თუ ინტეგრების ერთი საზღვარი მაინც არის უსასრულო ან თუ ბირთვი K (x,y) სინგულარულია a≤x≤b, a≤y≤b კვადრატის ერთ ან რამდენიმე წერტილში ან რომელიმე წირზე.

ი. გ. შეიძლება განვიხილოთ რამდენიმე ცვლადის ფუნქციებისათვის. ასეთია, მაგ., ი. გ.

u (x,y)–λK (x,y,s,t) u (s,t)dsdt= f (x,y).

განიხილავენ აგრეთვე არაწრფივ ი. გ-ებს, მაგ., u (x)= λK (x,t) f [u (t), t]dt (ჰამერშტაინის ი. გ.) ან u (x)= λK (x,t,u(t)]dt (ვოლტერას არაწრფივი ი. გ.) და სხვ.

ფრედჰოლმის მეორე გვარის ი. გ-ის ამონახსნი $u(x)$ იძებნება შემდეგი მეთოდებით: 1. ვოლტერა-ნეიმანის მეთოდი: $u(x)$ იძებნება λ-ს ხარისხების მწკრივის სახით, რ-ის კოეფიციენტები დამოკიდებულია x-ზე: $u(x)=\lambda^{j}(K^{j}f)(x)$ (ე. წ. ლიუვილ-ნეიმანის მწკრივი); აქ $(K'f)(x)\equiv K(x,t)(K^{j-1}f)(t)dt$, $(Kf)(x)\equiv K(x,t)(f)dt$. ეს მწკრივი კრებადია, როცა პარამეტრი λ საკმარისად მცირეა: 2. ფრედჰოლმის მეთოდი: $u(x)$ ამონახსნი λ-ის იმ მნიშვნელობებისთვის, რ-თათვისაც ის არსებობს, გამოისახება λ ცვლადის მთელი ფუქნციების საშუალებით; 3. ჰილბერტ-შმიდტის მეთოდი: იმ შემთხვევაში, როდესაც ბირთვი სიმეტრიულია, ე. ი. როცა $K(x,y)\equiv K(y,x)$ ამონახსნი $u(x)$ გამოისახება ორთოგონალურ $u_k(x)$ ფუნქციათა მწკრივების საშუალებით, ამასთან, ფუნქციები $u_k(x)$ აკმაყოფილებს შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას: $u_k(x)-\lambda K(x,t)\,u_k(t)dt=0$; 4. ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში ამონახსნი მარტივად მოიძებნება ლაპლასის გარდაქმნის საშუალებით; 5. იმ შემთხვევაში, როდესაც $K(x,y)=p_1(x)q_1(y)$ (ე. წ. გადაგვარებული ბირთვი), $u(x)$-ის მოძებნა დაიყვანება ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე.

ი. გ-ზე ხშირად დაიყვანება ჩვეულებრივი ან კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების სასაზღვრო ამოცანები; ასეთ დაყვანას აქვს როგორც თეორ., ისე პრაქტ. მნიშვნელობა. ი. გ-ებს ფართოდ იყენებენ მექანიკაში, დრეკადობის თეორიაში, თეორიულ ფიზიკაში, კერძოდ, ველის კვანტურ თეორიაში.

საქართველოში ი. გ-ების გამოყენება და განვითარება უკავშირდება ნ. მუსხელიშვილის, ა. ბიწაძის, ი. ვეკუას, ვ. კუპრაძის და სხვათა სახელებს. განსაკუთრებით აღსანიშნავია ნ. მუსხელიშვილის გამოკვლევები სინგულარული ი. გ-ების მიმართულებით.

ლიტ.: მ უ ს ხ ე ლ ი შ ვ ი ლ ი ნ., სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები: ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანები და მათი ზოგიერთი გამოყენება მათემატიკურ ფიზიკაში, გამოც. მე-3, თბ., 1982; К р а с н о в М. Л., Интегральные уравнения, М., 1975; П е т р о в с к и й И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965; С м и р н о в В. И., Курс высшей математики, 6-е изд., т. 4, ч. 1, М., 1974.