



საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემია

ქართული ენციკლოპედიის ი. აბაშიძის სახელობის მთავარი სამეცნიერო რედაქცია

კერძონარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებები

კერძონარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებები, განტოლებები, რომლებიც აკავშირებს ერთმანეთთან მრავალ ცვლადზე დამოკიდებულ საძიებელ ფუნქციას და ამ ფუნქციის კერძო წარმოებულებს. კერძონარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ფორმაა

$$F[x, u(x), u(x), \dots, u(x)] = 0 \quad (1),$$

სადაც F არის მოცემული ნამდვილი, ნულისგან განსხვავებული ფუნქცია, რ-იც დამოკიდებულია ევკლიდური E_n სივრცის ($n \geq 2$) D არეში მოცემულ $x = (x_1, \dots, x_n)$ წერტილზე, ამავე არეში განსაზღვრულ $u = u(x)$ ფუნქციაზე და $u(x)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულებზე $u_{a^{(1)}} = u_{a^{(1)}}_{a_1, \dots, a_n} = (\|a\| / \|x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}\|) u(x)$, სადაც $\alpha^0 (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. აქ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია, $\|a\| = \alpha_1, \|a\| = 1, 2, \dots, m$. ნატურალურ m რიცხვს ეწოდება (1) განტოლების რიგი, თუ არანულოვანია ერთი მაინც კერძო წარმოებული $(\partial/\partial u) D \in E_n$ არეში განსაზღვრულ უწყვეტ $u = u(x)$ ფუნქციას, რ-საც აქვს ამ არეში უწყვეტი კერძო წარმოებულები და (1) განტოლებას აკმაყოფილებს, ეწოდება ამ განტოლების რეგულარული ამონახსნი. რეგულარული ამონახსნების გარდა, დიდი მნიშვნელობა აქვს ამონახსნებს, რ-ებიც არ არის რეგულარული D არის ზოგიერთი იზოლირებული წერტილის (ან სპეციალური სახის მრავალსახეობის) მიდამოში. ასეთია, კერძოდ, **კ. დ. გ.**-ის ფუნდამენტური ამონახსნები. ფუნდამენტური ამონახსნებით გამოისახება **კ. დ. გ.**-ის რეგულარული ამონახსნების ფართო კლასები, რაც მათი თვისებრივი ყოფაქცევის და სტრუქტურული თავისებურებების შესწავლის საფუძველია.

(1) სახის **კ. დ. გ.**-ის თეორიაში ფუნდამენტურ როლს თამაშობს ე. წ. მახასიათებელი ფორმა. თუ ფუნქცია F წრფივად არის დამოკიდებული $u^{(|a|)}_{a_1, \dots, a_n}$ ცვლადებზე, მაშინ (1) განტოლებას წრფივი ეწოდება. მე-2 რიგის წრფივ **კ. დ. გ.**-ს შეესაბამება კვადრატული მახასიათებელი ფორმა

$$Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = A_{ij} \lambda_i \lambda_j, \quad (2),$$

რ-ის კოეფიციენტები $A_{ij} = (\partial/\partial u_a^{(2)})F$ დამოკიდებულია მხოლოდ xID წერტილზე. ფორმა (2) თითოეულ xID წერტილში მიიყვანება კანონიკურ სახეზე $Q = a_i \xi_i^2$, სადაც $a_i = \pm 1$ ან 0 , $i=1, \dots, n$. როცა ყველა $a_i = +1$ ან ყველა $a_i = -1$, მაშინ მე-2 რიგის წრფივ **კ. დ. გ.**-ს ეწოდება ელიფსური xID წერტილში. თუ ერთი რომელიმე $a_i > 0$, ყველა დანარჩენი კი უარყოფითია (ან პირიქით), მაშინ განტოლებას ეწოდება ჰიპერბოლური xID წერტილში. თუ დადებითი (უარყოფითი) კოეფიციენტების რაოდენობაა l , $1 < l < n - 1$, ხოლო უარყოფითებისა (დადებითებისა) - $n - l$, მაშინ განტოლებას ეწოდება ულტრაჰიპერბოლური xID წერტილში. იმ შემთხვევაში, თუ a_i კოეფიციენტებიდან რომელიმე (მაგრამ არა ყველა) ნულის ტოლია, განტოლებას ეწოდება პარაბოლური xID წერტილში. განტოლებას ეწოდება ელიფსური (ჰიპერბოლური, ულტრაჰიპერბოლური, პარაბოლური) ტიპისა D არეში, თუ ის ელიფსურია (ჰიპერბოლურია, ულტრაჰიპერბოლურია, პარაბოლურია) ამ არის ყოველ წერტილში. თუ განტოლება სხვადასხვა ტიპისაა D არის სხვადასხვა ნაწილებში, ამბობენ, რომ ის ამ არეში შერეული ტიპისაა. მე-2 რიგის წრფივი **კ. დ. გ.**-ით აიწერება მრავალი ფიზიკური პროცესი.

ანალოგიურად, მათი მახასიათებელი ფორმის საფუძველზე ხდება არაწრფივ **კ. დ. გ.**-ის კლასიფიცირება. რამდენადაც არაწრფივ შემთხვევაში მახასიათებელი ფორმის კოეფიციენტები, გარდა xID წერტილისა, დამოკიდებულია აგრეთვე $u(x)$ ამონახსნზე და მის კერძო წარმოებულებზე, არაწრფივი **კ. დ. გ.** ამა თუ იმ ტიპს მიეკუთვნება თითოეული ამონახსნისთვის ცალ-ცალკე. განიხილება აგრეთვე **კ. დ. გ.**-ის სისტემები. კერძოდ, **კ. დ. გ.**-ის სისტემის შესწავლაზე დაიყვანება (1) განტოლება, თუ მისი მარცხ. მხარე შეიცავს კომპლექსურ სიდიდეებს.

კ. დ. გ.-ს, რ-ებიც აღწერს ბუნების მოვლენებს, როგორც წესი, აქვს ამონახსნთა მთელი ოჯახი (თუმცა არსებობს ისეთი **კ. დ. გ.**, რ-თაც საერთოდ არ აქვს ამონახსნი). ბუნებრივი მოვლენის აღმწერი ამონახსნი უნდა აკმაყოფილებდეს დამატებით პირობებსაც, როგორც წესი, D არის საზღვრის წერტილებში (ე.წ. სასაზღვრო პირობები). **კ. დ. გ.**-ის თეორიაში ცენტრ. ადგილი უჭირავს ისეთი რეგულარული ამონახსნების პოვნის ამოცანებს, რ-ებიც აკმაყოფილებს ამა თუ იმ სასაზღვრო პირობებსაც. ასეთი სასაზღვრო ამოცანები გამოკვლეულია მეტნაკლები სისრულით მხოლოდ ზოგიერთი კერძო შემთხვევისათვის, წრფივი მე-2 რიგის **კ. დ. გ.**-ისთვის.

ისტორიულად პირველი **კ. დ. გ.** [თანამედროვე აღნიშვნებში $\partial z / \partial x = f(x, y)$] აღმოაჩინეს ლ. ეილერის 1734-35 წლების შრომებში. 1743 წ. დალამბერმა (ფრანგი მათემატიკოსი, მექანიკოსი და ფილოსოფოსი) ამოხსნა სიმის რხევის განტოლება (ერთგანზომილებიანი ჰიპერბოლური განტოლება). **კ. დ. გ.**-ის თეორიის განვითარების II ეტაპი (1770-1830) უკავშირდება ჟ. ლაგრანჟის (საფრანგეთი, 1736-1813), ო. კოშის (საფრანგეთი, 1789-1857), კ. იაკობის (გერმანია, 1804-51) სახელებს. ზოგიერთ შემთხვევაში **კ. დ. გ.**-ის ამოხსნა დაიყვანება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნაზე ცვლადთა განცალების მეთოდით, რ-იც შექმნა ჟ. ფურიემ (საფრანგეთი, 1768-1830). XIX ს. 70-იან წლებში კვლევის ახ. მიდგომა, რ-იც იყენებს უწყვეტ ჯგუფთა თეორიის იდეებს, განავითარა ნორვეგიელმა მათემატიკოსმა ს. ლიემ (1842-99). XIX ს. დასასრულს და XX ს. **კ. დ. გ.**-ის თეორიის განვითარება უკავშირდება ამ განტოლებათა სულ უფრო ფართო გამოყენებას მათემატიკის სხვა დარგებში, კლასიკურ და კვანტურ ფიზიკაში, ქიმიამში და სხვა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში, ასევე ტექნიკაში, XX ს. II ნახ-იდან კი - ეკონომიკაში, სოციოლოგიაში და სხვ.

უმეტეს შემთხვევაში **კ. დ. გ.**-ის ზუსტი ამოხსნა შეუძლებელია და მათი ამონახსნების ასაგებად იყენებენ მიახლოებით მეთოდებს. მ. შ. ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია რიცხვით მეთოდებს, კერძოდ, სასრულ-სხვაობიან მეთოდებს. რიცხვითი მეთოდების გამოყენებამ და მძლავრ კომპიუტერებზე ამ მეთოდების რეალიზაციამ მოითხოვა **კ. დ. გ.**-ის ამონახსნების მდგრადობის შესწავლა. ამოცანა ითვლება კლასიკური აზრით კორექტულად დასმულად, თუ მას აქვს ერთადერთი მდგრადი ამონახსნი. XX ს. II ნახ-ში საბჭოთა მათემატიკოსმა ა. ტიხონოვმა (1906-1993) დაიწყო არაკორექტული ამოცანების შესწავლა. ასეთ ამოცანებზე დაიყვანება, მაგ., ჰიდრო- და აეროდინამიკაში ცნობილი სასაზღვრო ფენის პრობლემა.

მიახლოებითი ამონახსნების პოვნისა და მათი პრაქტიკული აგებისთვის განვითარდა **კ. დ. გ.**-ის ამოხსნის ფუნქციონალური მეთოდები.

საქართველოში **კ. დ. გ.**-ის შესწავლა XX ს. 20-იან წლებში დაიწყო. სხვადასხვა ტიპის **კ. დ. გ.**-ის ამოხსნაზე დაიყვანება ვარიაციათა აღრიცხვის ძირითადი ამოცანა, რ-საც იკვლევდა ა. რაზმაძე. მან მსოფლიოში პირველად შეისწავლა ამოცანები, რ-ებიც მოითხოვს წყვეტის მქონე ფუნქციებისა და მათი კერძო წარმოებულების განხილვას (ამ კვლევებში ა. რაზმაძემ ფაქტობრივად შემოიტანა სინგულარული განზოგადებული ფუნქციები). ვარიაციათა აღრიცხვის მეთოდებს ფართოდ იყენებენ ეილერის ტიპის მრავალგანზომილებიან **კ. დ. გ.**-ის შესწავლისას, განსაკუთრებით, ელიფსური ტიპის **კ. დ. გ.**-ის ამოხსნისათვის.

ნ. მუსხელიშვილმა და ა. რაზმაძემ ცვლადთა განცალების მეთოდით იპოვეს და შეისწავლეს შროდინგერის განტოლების (პარაბოლური ტიპის სამგანზომილებიანი **კ. დ. გ.**; იხ. სტ. კვანტური მექანიკა) ამონახსნები რამდენიმე საინტერესო სისტემისათვის, ამ

განტოლების ფორმულირებისთანავე (1926-27).

ელიფსური ტიპის **კ. დ. გ.**-ს და მათ სხვადასხვა გამოყენებას 1936-იდან ინტენსიურად იკვლევდა ი. ვეკუა. 40-იან წლებში ეს კვლევები დასრულდა ორი დამოუკიდებელი ცვლადისთვის ანალიზურკოეფიციენტებიანი ელიფსური ტიპის წრფივ **კ. დ. გ.**-ის მწყობრი თეორიის შექმნით. ასეთი **კ. დ. გ.**-ის ამონახსნთა ზოგადი კომპლექსური წარმოდგენები, რეზიკ ი. ვეკუამ ააგო, სასარგებლო აღმოჩნდა ამ ამონახსნების (ე. წ. განზოგადებული ანალიზური ფუნქციების, იხ. სტ. კარლემან-ვეკუას განტოლება) ახალი თვისებრივი და სტრუქტურული თავისებურებების დასადგენად, აგრეთვე **კ. დ. გ.**-ის ფართო კლასისა და სასაზღვრო ამოცანების შესასწავლად, რეზიკ მანამდე ცნობილი მეთოდები არ შეხებია (სტალინური პრემია, 1950).

ორ ცვლადზე დამოკიდებულ ელიფსურ **კ. დ. გ.**-ის გამოკვლევისას წარმატებით იყენებენ კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მეთოდებს (ნ. მუსხელიშვილი). ასეთი ტიპის **კ. დ. გ.**-ით აიწერება დრეკადობის თეორიის და გარსთა ზოგადი თეორიის (ი. ვეკუა) ამოცანების ფართო კლასი. n -განზომილებიანი ($n \geq 3$) ელიფსური ტიპისაა **კ. დ. გ.**, რეზიკ აიწერება, მაგ., ელექტროსტატიკური ველის პოტენციალი სივრცეში დამუხტული სხეულის გარშემო (ლაპლასის განტოლება) და ელექტრული მუხტის მქონე გარემოში (პუასონის განტოლება). ჰიპერბოლური ტიპისაა ტალღური განტოლება სივრცეში ($n \geq 3$), რის შესწავლას სხვადასხვა თვისებების მქონე გარემოში მიეძღვნა ქართველ მათემატიკოსთა (თ. ბურჭულაძე, თ. გეგელია, ნ. ვეკუა, ა. კალანდია, ი. კილურაძე და სხვ.) და ფიზიკოსთა (გ. აბურჯანია, თ. კახნიაშვილი, ჯ. ლომინაძე, გ. მაჩაბელი, გ. მელიქიძე, ა. როგავა, ვ. ქირია, გ. ჩაგელიშვილი, ნ. ცინცაძე და სხვ.) მრავალი ნაშრომი.

გარემოში სითბოს გავრცელება აიწერება პარაბოლური ტიპის **კ. დ. გ.**-ით - თბოგამტარობის განტოლებით

$$(\partial^2/\partial x_i^2) u(x) - (\partial/\partial x_n) u(x) = 0, n \geq 3.$$

ამ და სხვა პარაბოლური ტიპის **კ. დ. გ.**-ის შესწავლაში დიდი წვლილი შეიტანა ვ. კუპრაძემ. მასვე ეკუთვნის ჰიპერბოლური ტიპის ჰელმჰოლცის **კ. დ. გ.**-ის თეორიის განვითარება, დრეკადობის თეორიისა და თერმოდრეკადობის 3-განზომილებიანი ამოცანების შესაბამისი წრფივი **კ. დ. გ.**-ის გამოკვლევა, **კ. დ. გ.**-ის მიახლოებითი ამონახსნების აგების მძლავრი მეთოდები (დამხმარე წყაროების მეთოდი და სხვ.). თერმოდრეკადობის 3-განზომილებიან ამოცანებთან დაკავშირებული **კ. დ. გ.** შეისწავლა ნ. კახნიაშვილმა. პარაბოლური ტიპის **კ. დ. გ.**-ის ამოსახსნელად შემუშავებულ დამხმარე წყაროების მეთოდს წარმატებით იყენებენ სხვადასხვა გარემოში ელექტრომაგნიტური ტალღის გავრცელების აღსაწერად (რ. ბარიძე, დ. ქარქაშაძე, რ. ჯობავა და სხვ.).

ა. ბინაძემ დაამუშავა მეთოდები, რ-ებიც საშუალებას იძლევა დავიყვანოთ **კ. დ. გ**-ის ამოხსნის ამოცანა (მოცემული სასაზღვრო პირობებით) ინტეგრალური განტოლების შესწავლაზე. მანვე განავითარა ჰიპერბოლური და შერეული ტიპის **კ. დ. გ**-თა თეორიის მეთოდები, შეისწავლა შესაბამისი არალოკალური სასაზღვრო ამოცანები, სასაზღვრო ამოცანები ელიფსური ტიპის **კ. დ. გ**-თა სისტემებისთვის (მ. შ. არალოკალური; შემდგომ ეწოდა ბინაძე-სამარსკის ამოცანა), კვაზინრფივ **კ. დ. გ**-თა სისტემები, რ-ებიც ბუნებისა და ტექ. მრავალ მოვლენას აღწერს (ამ მიმართულებებით დასმული ლოკალური და არალოკალური ამოცანების გამოკვლევას მიეძღვნა ჯ. გვაზავას, ო. ჯოხაძის, ტ. კილურაძის, დ. გორდემიანის, გ. ჯაიანის, თ. ჯანგველაძის, ს. ხარიბეგაშვილის და სხვ. მათემატიკოსთა შრომები). ცნობილია ლავრენტიევ-ბინაძის განტოლება და ბინაძის განტოლება.

კ. დ. გ-ის ამონახსნის აგების მეთოდებს კვაზიკონფორმული ასახვების გამოყენებით იკვლევდა ი. ვეკუას მოსწავლე ბ. ბოიარსკი (მოსკოვის ვ. სტეკლოვის სახ. მათ. ინ-ტი).

კ. დ. გ-ის მიახლოებითი ამონახსნის აგების ახ. მეთოდი, რ-ითაც ხერხდება ზუსტი ამონახსნის განსაკუთრებულობათა ნაწილობრივი გათვალისწინება (რაც რადიკალურად აუმჯობესებს აგებული მწკრივების კრებადობას), დამუშავდა ა. ტურბინერის, ა. უშვერიძის და სხვათა შრომებში. ამ მეთოდის ჩარჩოებში მე-2 რიგის წრფივი **კ. დ. გ**-ის ამოხსნა დაიყვანება (არაწრფივი) პირველი რიგის განტოლებების ამოხსნაზე, რაც რიცხვითი მეთოდებით გამოთვლებს ამარტივებს.

არაწრფივ **კ. დ. გ**-ებს და მათ სისტემებს იკვლევდნენ და იყენებდნენ ქართვ. მეცნიერები პლაზმის თეორიაში (გ. აბურჯანია, ჯ. ჯავახიშვილი), სხვადასხვა სტრუქტურის მქონე გარემოს მექან. თვისებების აღსაწერად (თ. ვაშაყმაძე), მაღალი ენერგიის პროცესების აღმწერ ამოცანებში (შრედინგერის არაწრფივი განტოლება; საინ-გორდონის განტოლება და სხვ., ი. ვაშაკიძე, გ. ჭილაშვილი, ა. ხელაშვილი და სხვ.; კადომცევ-ფეტვიაშვილის განტოლება) და მრავალ სხვა ამოცანაში. ქრომოდინამიკის ზუსტი **კ. დ. გ**-ის გამოყენებით ა. ხელაშვილმა, ქ. ნატროშვილმა და ვ. ხმალაძემ მიიღეს (1985) კვარკების პოტენციალის სრული სახე.

რიცხვით მეთოდებს პლაზმის თვისებების აღმწერი **კ. დ. გ**-ის ამოსახსნელად იყენებს თ. კალაძე. არაკორექტულ ამოცანებთან დაკავშირებული **კ. დ. გ**-ის ამოხსნის რიცხვითი მეთოდები დამუშავდა ჰ. მელაძის, ნ. სხირტლაძის და სხვ. მკვლევართა შრომებში.

ვითარდება სიმბოლური კომპიუტერული გამოთვლების მეთოდები, რ-ებიც შესაძლებლობას იძლევა **კ. დ. გ**-ის ამოხსნის პრომატევადი პროცედურა შესრულდეს რეალურ დროში (ნ. მახალდიანი, ი. ლომიძე, ნ. ჩაჩავა და სხვ.).

ლიტ.: Б е р с Л., Д ж о н Ф., Ш е х т е р М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; Б и ц а д з е А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981; მ ი ს ი ჯ ე , Уравнения математической физики, М., 1982; მ ი ს ი ჯ ე , Equations of the Mixed Type, Pergamon Press, 1964; მ ი ს ი ჯ ე , Partial Differential Equations, Word Scientific, 1993; მ ი ს ი ჯ ე , Boundary Value Problems for Second Order Elliptic Equations, «Applied Mathematics and Mechanics», vol. 5, North-Holland, 2012; მ ი ს ი ჯ ე , Integral Equations of First Kind, Word Scientific, 2014; К у п р а д з е В. Д., Основные задачи математической теории диффракции, Л. М., 1935; მ ი ს ი ჯ ე , Методы потенциала в теории упругости, М., 1963; К у р а н т Р., Уравнения с частными производными, М., 1964; Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972.

ს. ხარიბეგაშვილი
