



საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემია

ქართული ენციკლოპედიის ი. აბაშიძის სახელობის მთავარი სამეცნიერო რედაქცია

ინტეგრალური განტოლება

ინტეგრალური განტოლება, განტოლება, რომელიც საძიებელ ფუნქციას ინტეგრალის ნიშნის შიგნით შეიცავს. ფიზ. და მათ.-ფიზ. მრავალრიცხოვან ამოცანებს მივყავართ სხვადასხვა ტიპის ი. გ-ებამდე. პირველი გვარის წრფივი ი. გ. ეწოდება $K(x,t) u(t) dt = f(x)$ სახის განტოლებას, ფრედჰოლმის მეორე გვარის ი. გ. – განტოლებას $u(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt = f(x)$ (თუ $f(x) \equiv 0$, მაშინ მას ეწოდება ფრედჰოლმის ერთგვაროვანი ი. გ.). ყველა განტოლებაში ფუნქცია $K(x,y)$ – ი. გ-ის ბირთვი – ცნობილია და განსაზღვრულია $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$ კვადრატზე; ასევე ცნობილია ფუნქცია $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) და λ პარამეტრი. საძიებელი ფუნქცია $u(x)$ ($a \leq x \leq b$). $K(x,y)$, $f(x)$, $u(x)$ ფუნქციებსა და λ პარამეტრს შეუძლია მიიღოს როგორც ნამდვილი, ისე კომპლ. მნიშვნელობები. თუ ბირთვი $K(x,y)$ ნულის ტოლი ხდება, $K(x,y) = 0$, როდესაც $y > x$, მიიღება ე. წ. ვოლტერას ი. გ.:

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x,t) u(t) dt = f(x).$$

ი. გ-ს ეწოდება განსაკუთრებული ან სინგულარული, თუ ინტეგრალის ერთი საზღვარი მაინც არის უსასრულო ან თუ ბირთვი $K(x,y)$ სინგულარულია $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$ კვადრატის ერთ ან რამდენიმე წერტილში ან რომელიმე წირზე.

ი. გ. შეიძლება განვიხილოთ რამდენიმე ცვლადის ფუნქციებისათვის. ასეთია, მაგ., ი. გ.

$$u(x,y) - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x,y,s,t) u(s,t) ds dt = f(x,y).$$

განიხილავენ აგრეთვე არანრფივი ი. გ-ებს, მაგ., $u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) f[u(t), t] dt$ (ჰამერშტაინის ი. გ.) ან $u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t, u(t)) dt$ (ვოლტერას არანრფივი ი. გ.) და სხვ.

ფრედჰოლმის მეორე გვარის ი. გ-ის ამონახსნი $u(x)$ იძებნება შემდეგი მეთოდებით: 1. ვოლტერა-ნეიმანის მეთოდი: $u(x)$ იძებნება λ -ს ხარისხების მწკრივის სახით, რ-ის კოეფიციენტები დამოკიდებულია x -ზე: $u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (K^j f)(x)$ (ე. წ. ლიუვილ-ნეიმანის მწკრივი); აქ $(K^j f)(x) \equiv \int_a^b K(x,t)(K^{j-1} f)(t) dt$, $(Kf)(x) \equiv \int_a^b K(x,t)f(t) dt$. ეს მწკრივი კრებადია, როცა პარამეტრი λ საკმარისად მცირეა; 2. ფრედჰოლმის მეთოდი: $u(x)$ ამონახსნი λ -ის იმ მნიშვნელობებისთვის, რ-თათვისაც ის არსებობს, გამოისახება λ ცვლადის მთელი ფუნქციების საშუალებით; 3. ჰილბერტ-შმიდტის მეთოდი: იმ შემთხვევაში, როდესაც ბირთვი სიმეტრიულია, ე. ი. როცა $K(x,y) \equiv K(y,x)$ ამონახსნი $u(x)$ გამოისახება ორთოგონალურ $u_k(x)$ ფუნქციათა მწკრივების საშუალებით, ამასთან, ფუნქციები $u_k(x)$ აკმაყოფილებს შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას: $u_k(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) u_k(t) dt = 0$; 4. ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში ამონახსნი მარტივად მოიძებნება ლაპლასის გარდაქმნის საშუალებით; 5. იმ შემთხვევაში, როდესაც $K(x,y) = p_1(x)q_1(y)$ (ე. წ. გადაგვარებული ბირთვი), $u(x)$ -ის მოძებნა დაიყვანება ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე.

ი. გ-ზე ხშირად დაიყვანება ჩვეულებრივი ან კერძონარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების სასაზღვრო ამოცანები; ასეთ დაყვანას აქვს როგორც თეორ., ისე პრაქტ. მნიშვნელობა. ი. გ-ებს ფართოდ იყენებენ მექანიკაში, დრეკადობის თეორიაში, თეორიულ ფიზიკაში, კერძოდ, ველის კვანტურ თეორიაში.

საქართველოში ი. გ-ების გამოყენება და განვითარება უკავშირდება ნ. მუსხელიშვილის, ა. ბინაძის, ი. ვეკუას, ვ. კუპრაძის და სხვათა სახელებს. განსაკუთრებით აღსანიშნავია ნ. მუსხელიშვილის გამოკვლევები სინგულარული ი. გ-ების მიმართულებით.

ლიტ.: მუსხელიშვილი ნ., სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები: ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანები და მათი ზოგიერთი გამოყენება მათემატიკურ ფიზიკაში, გამოც. მე-3, თბ., 1982; К р а с н о в М. Л., Интегральные уравнения, М., 1975; П е т р о в с к и й И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965; С м и р н о в В. И., Курс высшей математики, 6-е изд., т. 4, ч. 1, М., 1974.